

Billards

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France

Scuola Normale Superiore

Inauguration du Laboratoire Fibonacci

Pisa, 5 Mars 2012

Un système dynamique est constitué

Un système dynamique est constitué

- ▶ d'un *espace des phases* X représentant l'ensemble des états possibles du système considéré;

Un système dynamique est constitué

- ▶ d'un *espace des phases* X représentant l'ensemble des états possibles du système considéré;
- ▶ d'une *loi d'évolution* décrivant le changement infinitésimal (temps continu)

Un système dynamique est constitué

- ▶ d'un *espace des phases* X représentant l'ensemble des états possibles du système considéré;
- ▶ d'une *loi d'évolution* décrivant le changement infinitésimal (temps continu) ou à court terme (temps discret) de l'état du système.

Un système dynamique est constitué

- ▶ d'un *espace des phases* X représentant l'ensemble des états possibles du système considéré;
- ▶ d'une *loi d'évolution* décrivant le changement infinitésimal (temps continu) ou à court terme (temps discret) de l'état du système.

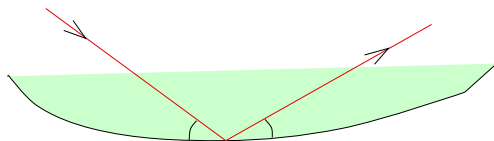
Le but de la théorie est de comprendre l'évolution **à long terme** du système, en particulier ses propriétés **statistiques et asymptotiques**.

Billards planaires

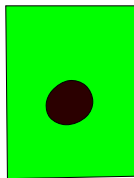
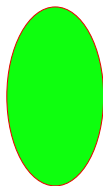
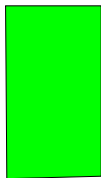
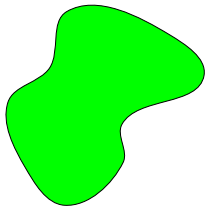
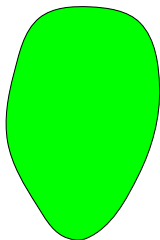
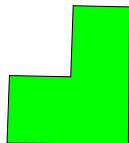
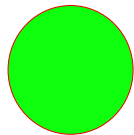
Dans un ouvert connexe borné U de \mathbb{R}^2 , dont le bord ∂U est lisse par morceaux, un point matériel se déplace à vitesse constante en rebondissant élastiquement sur le bord:

Dans un ouvert connexe borné U de \mathbb{R}^2 , dont le bord ∂U est lisse par morceaux, un point matériel se déplace à vitesse constante en rebondissant élastiquement sur le bord:

l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.



Quelques tables intéressantes



Comme le mouvement entre deux rebonds est rectiligne uniforme, il suffit d'étudier la suite des rebonds sur le bord.

Comme le mouvement entre deux rebonds est rectiligne uniforme, il suffit d'étudier la suite des rebonds sur le bord.

Pour chaque rebond, il faut connaître la position sur ∂U et l'angle d'incidence.

Comme le mouvement entre deux rebonds est rectiligne uniforme, il suffit d'étudier la suite des rebonds sur le bord.

Pour chaque rebond, il faut connaître la position sur ∂U et l'angle d'incidence.

L'espace des phases est donc $\partial U \times [0, \pi]$.

Comme le mouvement entre deux rebonds est rectiligne uniforme, il suffit d'étudier la suite des rebonds sur le bord.

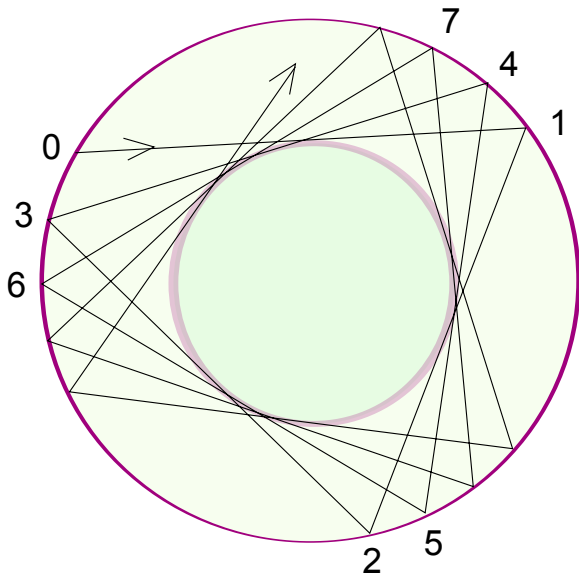
Pour chaque rebond, il faut connaître la position sur ∂U et l'angle d'incidence.

L'espace des phases est donc $\partial U \times [0, \pi]$.

La loi d'évolution est la transformation de l'espace des phases dans lui-même qui associe à un rebond (en un point lisse du bord) le rebond suivant.

La table la plus simple

La table la plus simple



Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

4

Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

- ‘ L’angle d’incidence θ des rebonds successifs reste le même; chaque trajectoire reste tangente à un cercle concentrique au bord de la table.

Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

' L'angle d'incidence θ des rebonds successifs reste le même; chaque trajectoire reste tangente à un cercle concentrique au bord de la table. Donc l'espace des phases (cylindrique) est feuilleté en cercles invariants par la dynamique.

Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

‘ L’angle d’incidence θ des rebonds successifs reste le même; chaque trajectoire reste tangente à un cercle concentrique au bord de la table. Donc l’espace des phases (cylindrique) est feuilleté en cercles invariants par la dynamique.

Sur le cercle correspondant à un angle d’incidence θ , la transformation décrivant la loi d’évolution est

$$x \mapsto x + \frac{\theta}{\pi} \pmod{\mathbb{Z}}$$

Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

‘ L’angle d’incidence θ des rebonds successifs reste le même; chaque trajectoire reste tangente à un cercle concentrique au bord de la table. Donc l’espace des phases (cylindrique) est feuilleté en cercles invariants par la dynamique.

Sur le cercle correspondant à un angle d’incidence θ , la transformation décrivant la loi d’évolution est

$$x \mapsto x + \frac{\theta}{\pi} \pmod{\mathbb{Z}}$$

Pour les cercles de l’espace des phases correspondant à un angle d’incidence $\theta = \pi \frac{p}{q}$ commensurable à π , toutes les trajectoires sont fermées et se répètent avec période q .

Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

‘ L’angle d’incidence θ des rebonds successifs reste le même; chaque trajectoire reste tangente à un cercle concentrique au bord de la table. Donc l’espace des phases (cylindrique) est feuilleté en cercles invariants par la dynamique.

Sur le cercle correspondant à un angle d’incidence θ , la transformation décrivant la loi d’évolution est

$$x \mapsto x + \frac{\theta}{\pi} \pmod{\mathbb{Z}}$$

Pour les cercles de l’espace des phases correspondant à un angle d’incidence $\theta = \pi \frac{p}{q}$ commensurable à π , toutes les trajectoires sont fermées et se répètent avec période q .

Par contre, sur les cercles de l’espace des phases correspondant à un angle d’incidence θ non commensurable à π , les trajectoires sont denses et même équiréparties:

Dynamique régulière (quasipériodique) dans un billard circulaire

‘ L’angle d’incidence θ des rebonds successifs reste le même; chaque trajectoire reste tangente à un cercle concentrique au bord de la table. Donc l’espace des phases (cylindrique) est feuilleté en cercles invariants par la dynamique.

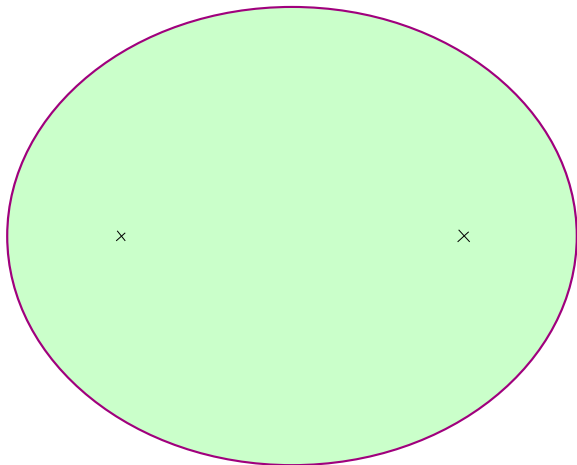
Sur le cercle correspondant à un angle d’incidence θ , la transformation décrivant la loi d’évolution est

$$x \mapsto x + \frac{\theta}{\pi} \pmod{\mathbb{Z}}$$

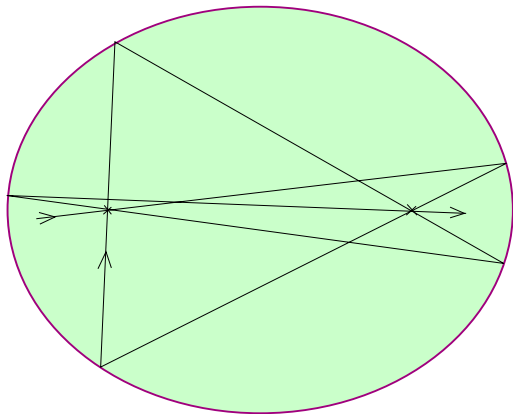
Pour les cercles de l’espace des phases correspondant à un angle d’incidence $\theta = \pi \frac{p}{q}$ commensurable à π , toutes les trajectoires sont fermées et se répètent avec période q .

Par contre, sur les cercles de l’espace des phases correspondant à un angle d’incidence θ non commensurable à π , les trajectoires sont denses et même équiréparties: la proportion des rebonds qui se situent dans un arc A du bord tend vers la longueur (relative) de A .

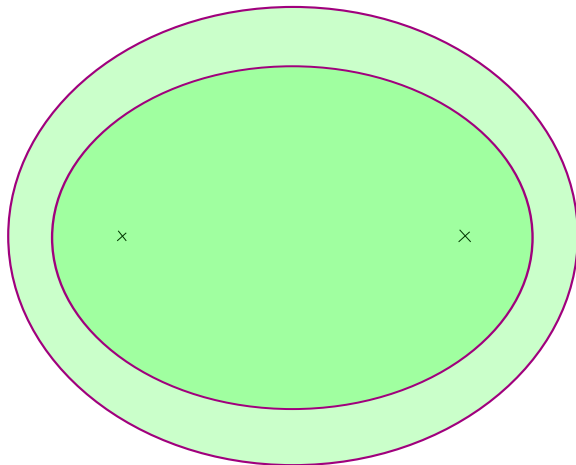
Une table elliptique et ses foyers



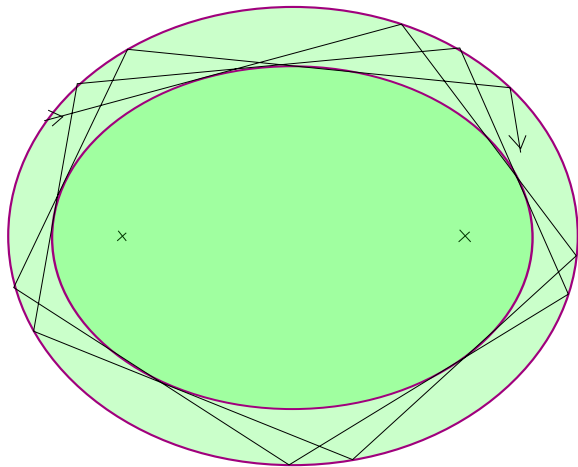
Trajectoires passant par les foyers



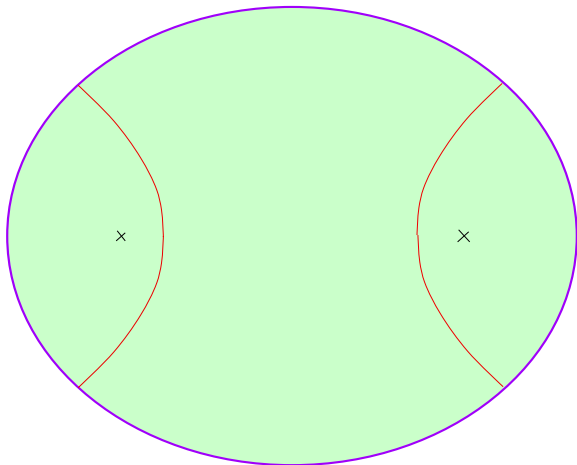
Une ellipse homofocale



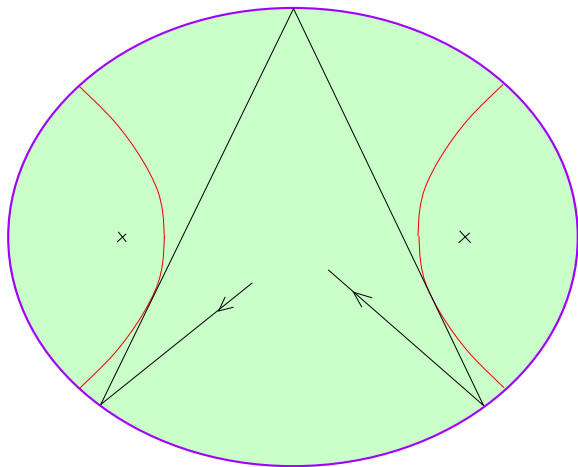
Les ellipses homofocales sont des caustiques



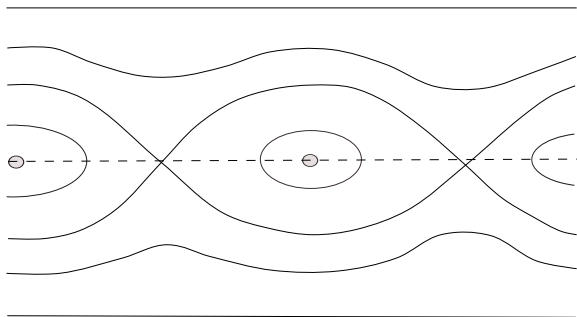
Une hyperbole homofocale



Les hyperboles homofocales sont aussi des caustiques



L'espace des phases du billard elliptique



Une conjecture de Birkhoff

Dans une table elliptique, toutes les trajectoires suffisamment rasantes (ne passant pas par ou entre les foyers) restent tangentes à une *caustique* (en l'occurrence une ellipse homofocale).

Une conjecture de Birkhoff

Dans une table elliptique, toutes les trajectoires suffisamment rasantes (ne passant pas par ou entre les foyers) restent tangentes à une *caustique* (en l'occurrence une ellipse homofocale).

De façon équivalente, les extrémités de l'espace des phases cylindrique sont feuilletées par une famille de courbes invariantes sous l'action de la dynamique.

Une conjecture de Birkhoff

Dans une table elliptique, toutes les trajectoires suffisamment rasantes (ne passant pas par ou entre les foyers) restent tangentes à une *caustique* (en l'occurrence une ellipse homofocale).

De façon équivalente, les extrémités de l'espace des phases cylindrique sont feuilletées par une famille de courbes invariantes sous l'action de la dynamique.

Birkhoff a conjecturé que les tables elliptiques étaient les **seules** tables strictement convexes (à bord lisse) possédant cette propriété!

Une propriété remarquable des tables strictement convexes à bord lisse

Une propriété remarquable des tables strictement convexes à bord lisse

Si le bord est suffisamment lisse (au moins C^6), et si sa courbure est partout strictement positive, alors il existe une famille de caustiques s'accumulant sur le bord.

Une propriété remarquable des tables strictement convexes à bord lisse

Si le bord est suffisamment lisse (au moins C^6), et si sa courbure est partout strictement positive, alors il existe une famille de caustiques s'accumulant sur le bord.

Chaque caustique correspond dans l'espace des phases à une courbe invariante sur laquelle la dynamique s'exprime comme une rotation $x \mapsto x + \alpha$ dans une coordonnée x appropriée.

Une propriété remarquable des tables strictement convexes à bord lisse

Si le bord est suffisamment lisse (au moins C^6), et si sa courbure est partout strictement positive, alors il existe une famille de caustiques s'accumulant sur le bord.

Chaque caustique correspond dans l'espace des phases à une courbe invariante sur laquelle la dynamique s'exprime comme une rotation $x \mapsto x + \alpha$ dans une coordonnée x appropriée.

La probabilité qu'un point tiré au hasard sur la table se trouve sur une caustique tend vers 1 à mesure qu'on se rapproche du bord!
La même propriété a lieu dans l'espace des phases.

Une propriété remarquable des tables strictement convexes à bord lisse

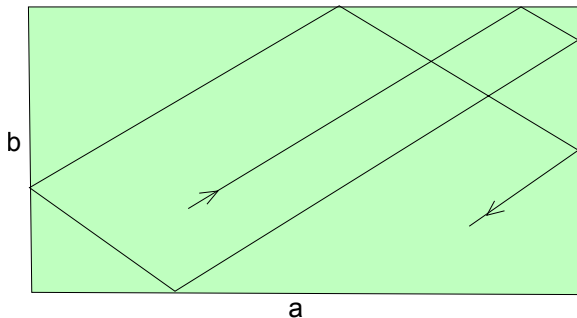
Si le bord est suffisamment lisse (au moins C^6), et si sa courbure est partout strictement positive, alors il existe une famille de caustiques s'accumulant sur le bord.

Chaque caustique correspond dans l'espace des phases à une courbe invariante sur laquelle la dynamique s'exprime comme une rotation $x \mapsto x + \alpha$ dans une coordonnée x appropriée.

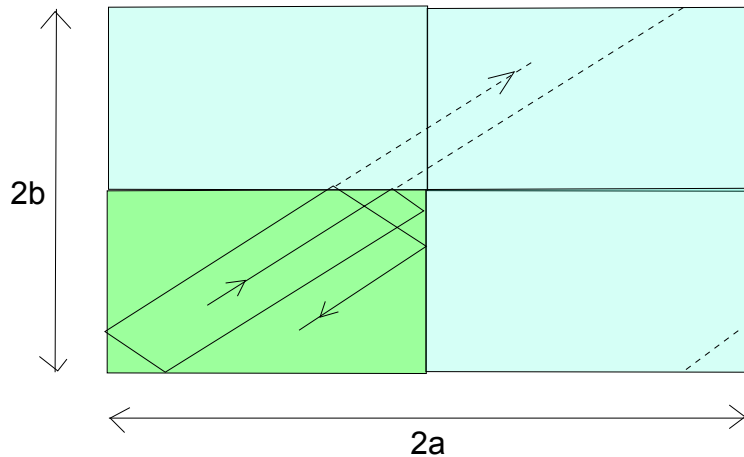
La probabilité qu'un point tiré au hasard sur la table se trouve sur une caustique tend vers 1 à mesure qu'on se rapproche du bord! La même propriété a lieu dans l'espace des phases.

Kolmogorov, Arnold, Moser (théorie KAM) , Lazutkin, R.Douady.

Une table rectangulaire..



..et son déploiement



Dynamique régulière dans une table rectangulaire

Les trajectoires du billard pour la table rectangulaire correspondent aux trajectoires **rectilignes** sur le *tore* $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$.

Dynamique régulière dans une table rectangulaire

Les trajectoires du billard pour la table rectangulaire correspondent aux trajectoires **rectilignes** sur le *tore* $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$.

On a essentiellement la même discussion que pour la table circulaire:

Les trajectoires du billard pour la table rectangulaire correspondent aux trajectoires **rectilignes** sur le *tore* $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$.

On a essentiellement la même discussion que pour la table circulaire:

- ▶ Si la pente de la trajectoire est commensurable à $\frac{b}{a}$, la trajectoire est fermée et se répète périodiquement;

Les trajectoires du billard pour la table rectangulaire correspondent aux trajectoires **rectilignes** sur le *tore* $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$.

On a essentiellement la même discussion que pour la table circulaire:

- ▶ Si la pente de la trajectoire est commensurable à $\frac{b}{a}$, la trajectoire est fermée et se répète périodiquement; c'est le cas en particulier des trajectoires horizontales et verticales.

Les trajectoires du billard pour la table rectangulaire correspondent aux trajectoires **rectilignes** sur le *tore* $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$.

On a essentiellement la même discussion que pour la table circulaire:

- ▶ Si la pente de la trajectoire est commensurable à $\frac{b}{a}$, la trajectoire est fermée et se répète périodiquement; c'est le cas en particulier des trajectoires horizontales et verticales.
- ▶ Autrement, les trajectoires, vues dans $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$, sont denses et équiréparties:

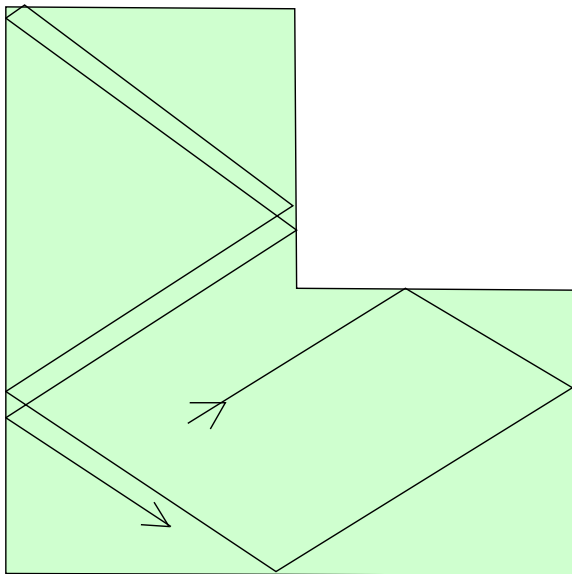
Dynamique régulière dans une table rectangulaire

Les trajectoires du billard pour la table rectangulaire correspondent aux trajectoires **rectilignes** sur le *tore* $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$.

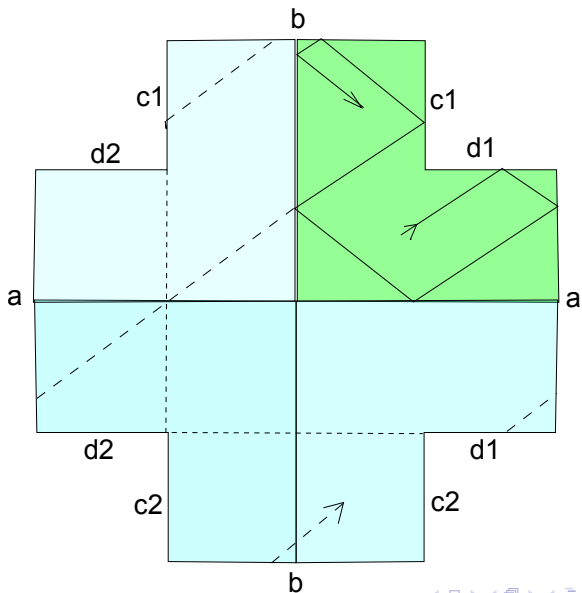
On a essentiellement la même discussion que pour la table circulaire:

- ▶ Si la pente de la trajectoire est commensurable à $\frac{b}{a}$, la trajectoire est fermée et se répète périodiquement; c'est le cas en particulier des trajectoires horizontales et verticales.
- ▶ Autrement, les trajectoires, vues dans $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$, sont denses et équiréparties: la proportion du temps passé dans une région A de $\mathbb{R}/2a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2b\mathbb{Z}$ tend vers l'aire (relative) $\frac{|A|}{4ab}$ de A .

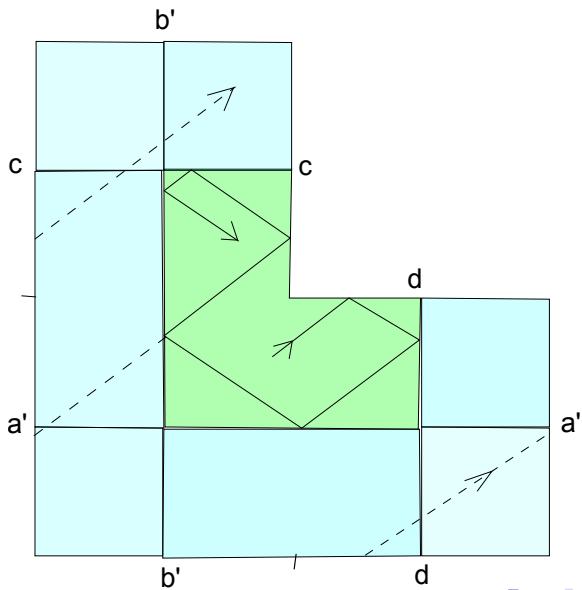
Une table plus exotique



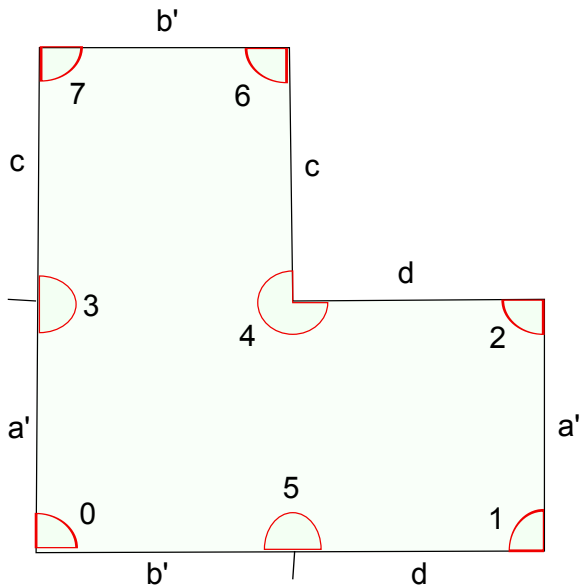
Son déploiement



Une autre version



Le point spécial de la surface déployée



Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$
et $\infty = \frac{1}{0}$),

Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$), la trajectoire est fermée et se répète périodiquement.

Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$), la trajectoire est fermée et se répète périodiquement. Autrement, la trajectoire est dense et équirépartie.

Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$), la trajectoire est fermée et se répète périodiquement. Autrement, la trajectoire est dense et équirépartie.

Soit S un segment vertical contenu dans la table.

Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$), la trajectoire est fermée et se répète périodiquement. Autrement, la trajectoire est dense et équirépartie.

Soit S un segment vertical contenu dans la table. Notons $N_S(x, \theta, T)$ le nombre de fois que la trajectoire de longueur T issue de x dans la direction θ rencontre S **dans la direction** θ .

Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$), la trajectoire est fermée et se répète périodiquement. Autrement, la trajectoire est dense et équirépartie.

Soit S un segment vertical contenu dans la table. Notons $N_S(x, \theta, T)$ le nombre de fois que la trajectoire de longueur T issue de x dans la direction θ rencontre S **dans la direction** θ .

L'équirépartition signifie que, lorsque la tangente de θ est irrationnelle, on a

Dynamique du billard en L

Lorsque la pente de la direction initiale est rationnelle (y compris $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$), la trajectoire est fermée et se répète périodiquement. Autrement, la trajectoire est dense et équirépartie.

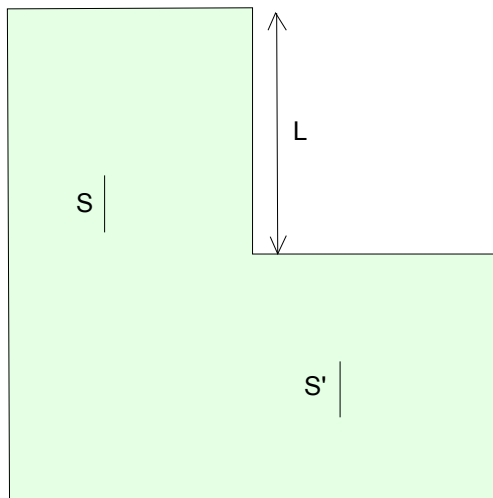
Soit S un segment vertical contenu dans la table. Notons $N_S(x, \theta, T)$ le nombre de fois que la trajectoire de longueur T issue de x dans la direction θ rencontre S **dans la direction** θ .

L'équirépartition signifie que, lorsque la tangente de θ est irrationnelle, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} N_S(x, \theta, T) = \cos \theta \frac{|S|}{3L}.$$

où $\frac{L}{2}$ est la longueur des côtés des 3 carrés constituant la table.

Déviation de l'équirépartition



Considérons deux segments verticaux S , S' de même longueur.

Pour n'importe quelle position initiale x et une direction initiale θ choisie au hasard,

Pour n'importe quelle position initiale x et une direction initiale θ choisie au hasard, l'ordre de grandeur **maximal** de $|N_S(x, \theta, T) - N_{S'}(x, \theta, T)|$ (lorsque T devient grand) est $T^{\frac{1}{3}}$.

Pour n'importe quelle position initiale x et une direction initiale θ choisie au hasard, l'ordre de grandeur **maximal** de $|N_S(x, \theta, T) - N_{S'}(x, \theta, T)|$ (lorsque T devient grand) est $T^{\frac{1}{3}}$.
(Zorich, Kontsevich, Forni, Bainbridge)

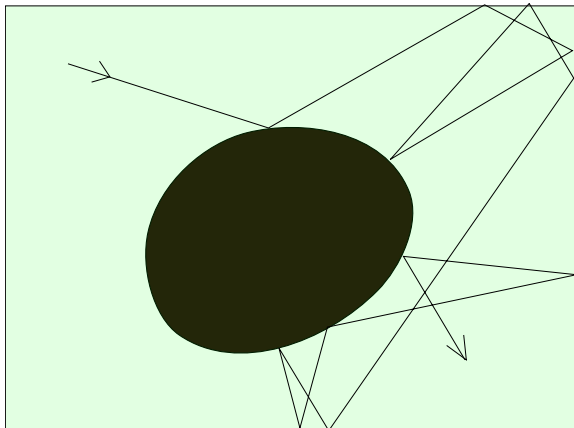
Pour n'importe quelle position initiale x et une direction initiale θ choisie au hasard, l'ordre de grandeur **maximal** de $|N_S(x, \theta, T) - N_{S'}(x, \theta, T)|$ (lorsque T devient grand) est $T^{\frac{1}{3}}$.
(Zorich, Kontsevich, Forni, Bainbridge)

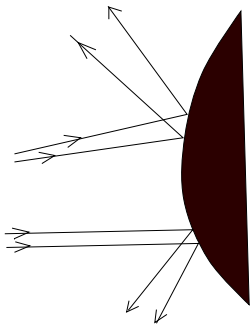
Dans le cas d'une table rectangulaire, $|N_S(x, \theta, T) - N_{S'}(x, \theta, T)|$ est au contraire dominé par n'importe quelle puissance positive de T .

Pour n'importe quelle position initiale x et une direction initiale θ choisie au hasard, l'ordre de grandeur **maximal** de $|N_S(x, \theta, T) - N_{S'}(x, \theta, T)|$ (lorsque T devient grand) est $T^{\frac{1}{3}}$.
(Zorich, Kontsevich, Forni, Bainbridge)

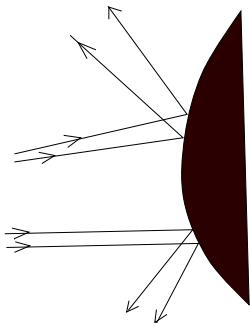
Dans le cas d'une table rectangulaire, $|N_S(x, \theta, T) - N_{S'}(x, \theta, T)|$ est au contraire dominé par n'importe quelle puissance positive de T .

Un billard dispersif





A chaque rebond sur l'obstacle intérieur, la concavité de l'obstacle tend à séparer des trajectoires proches.



A chaque rebond sur l'obstacle intérieur, la concavité de l'obstacle tend à séparer des trajectoires proches. Ceci provoque une divergence exponentielle des orbites proches et une impossibilité pratique de prévoir le comportement d'une trajectoire: l' "effet papillon". (Sinai)

Déjà, en 1843..

”... Car, relativement à la dernière partie de la supposition, on doit considérer que la plus légère variation dans les éléments des deux problèmes pourrait engendrer les plus graves erreurs de calcul, en faisant diverger absolument les deux courants d'évènements; à peu près de la même manière qu'en arithmétique une erreur qui, prise individuellement, peut être inappréciable, produit à la longue, par la force accumulative de la multiplication, un résultat effroyablement distant de la vérité ...”

”... Car, relativement à la dernière partie de la supposition, on doit considérer que la plus légère variation dans les éléments des deux problèmes pourrait engendrer les plus graves erreurs de calcul, en faisant diverger absolument les deux courants d'évènements; à peu près de la même manière qu'en arithmétique une erreur qui, prise individuellement, peut être inappréciable, produit à la longue, par la force accumulative de la multiplication, un résultat effroyablement distant de la vérité ...”

Edgar Allan Poe

The mystery of Marie Roget, 1843

Trad. Charles Baudelaire, 1864.